ДЕВЕТНАДЕСЕТИ ОБЛАСТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „ПЕРПЕРИКОН“ С МЕЖДУНАРОДНО УЧАСТИЕ КЪРДЖАЛИ, 30 ноември 2019 г.

Т Е М А   З А   8   К Л А С

Първите 5 задачи се оценяват с по 3 точки, задача 6 е с отворен отговор и се оценява с 5 точки, а задача 7 е с описание на решението и се оценява с 10 точки.

Време за работа 120 мин.

Задача 1. Да се намери броят на 6-цифрените числа с различни цифри измежду 0, 1, 2, 3, 4 и 5.

A) 400 **B)** 500 **C)** 600 **D)** 700 **E)** 800

Задача 2. Да се намери броят на делителите на числото 3600, включително 1 и самото число.

A) 8 **B)** 11 **C)** 22 **D)** 44 **E)** 45

Задача 3. В едно училище осмокласниците с отличен успех са 9, деветокласниците с отличен успех са 4, а десетокласниците с отличен успех са 7. В среща на ученици от града това училище трябва де участва с 10 свои ученици с отличен успех, включващи двама осмокласници, трима деветокласници и петима десетокласници. По колко начина може да се избере група от 10 ученици, която да представя училището в срещата?

A) 3024 **B)** 2646 **C)** 1062 **D)** 126 **E)** 81

Задача 4. В n-ъгълна пирамида броят на отсечките, които свързват кои да е два върха, е равен на 55. Намерете n.

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

Задача 5. Точката M е средата на страната AB на успоредника $ABCD$. Да се намери $\angle MCB$, ако $\angle AMD = 52^0$ и $\angle BAD = 76^0$.

A) 30^0 **B)** 35^0 **C)** 38^0 **D)** 41^0 **E)** 45^0

Задача 6. Пет двуцифрени числа, чиято сума се дели на 10, са съставени с използване на всички цифри точно по веднъж. Намерете броя на възможните различни суми на петте числа.

Задача 7. Даден е трапец $ABCD$ и точка M върху по-голямата основа $AB = 8$ така, че периметрите на триъгълниците AMD, MBC и DMC са равни. Да се намери дължината на по-малката основа CD.

О Т Г О В О Р И   И   Р Е Ш Е Н И Я

1. Отг. C). Шестцифрените числа с различни цифри са наредените шесторки цифри, образувани с 0, 1, 2, 3, 4 и 5, като на първо място не може да бъде нулата. Броят на наредените шесторки, образувани с 6 цифри, е пермутацията P_6, а броят на наредените петорки, образувани с 5 цифри (без цифрата 0), е пермутацията P_5. Следователно отговорът на задачата е $P_6 - P_5 = 6! - 5! = 5.5! = 5!(6-1) = 5.1.2.3.4.5 = 600$.

2. Отг. E). Разлагането на числото 3600 на произведение от прости множители е $3600 = 2^4.3^2.5^2$. Делителите, които са степени на 2, са 4 на брой. Тези, които са степени на 3, са 2 брой, а тези, които са степени на 5, са също 2 на брой. Оттук получаваме, че делителите, които са степени на 2, на 3 или на 5, са $4+2+2=8$.

Броят на делителите от вида $2^m.3^n$, $2^m.5^n$, $3^m.5^n$ и $2^m.3^n.5^k$ е съответно $4.2=8$, $4.2=8$, $2.2=4$ и $4.2.2=16$. Оттук получаваме още $8+8+4+16=36$ делителя. Като прибавим и делителя 1, получаваме общия брой $8+36+1=45$.

Задачата може да се реши и с използване на следния общ факт:

Ако p_1, p_2, …, p_m са всички прости делители на естественото число n, а k_1, k_2, …, k_m са съответните кратности на тези делители, то $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}...p_m^{k_m}$ се нарича *канонично разлагане* на естественото число n. То е единствено съгласно *основната теорема на аритметиката*. Броят на всички делители на n, включително 1 и n, се дава с формулата $(k_1+1)(k_2+1)...(k_m+1)$. В конкретния случай $m=3$, $k_1=4$, $k_2=2$ и $k_3=2$. Оттук търсеният брой е $5.3.3=45$.

3. Отг. A). Осмокласниците могат да се изберат по C_9^2 начина, деветокласниците – по C_4^3 начина, а десетокласниците – по C_7^5 начина. Групата може да бъде съставена по $C_9^2.C_4^3.C_7^5 = \dfrac{9.8}{2!}\cdot\dfrac{4.3.2}{3!}\cdot\dfrac{7.6.5.4.3}{5!} = 3024$ начина.

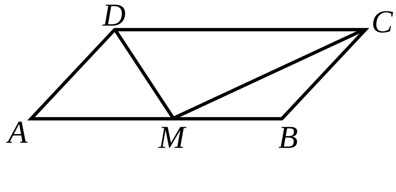
4. Отг. D). Броят на околните ръбове на една n-ъгълна пирадида е n, а броят на отсечките, които свързват два върха от основата (т.е. всички основни ръбове и диагонали), е $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Оттук $\dfrac{n(n-1)}{2}+n=55$, т.е. $n(n+1)=110$. Следователно числото 110 се представя като произведение на две последователни естествени числа. От равенството $110=10.11$ заключаваме, че $n=10$.

5. C). От ΔAMD имаме:

$$\angle ADM = 180^0 - (\angle AMD + \angle ADM) = 180^0 - (52^0 + 76^0) = 180^0 - 128^0 = 52^0.$$

Получаваме, че $\angle ADM = \angle AMD$ и следователно ΔAMD е равнобедрен. Оттук $AD = AM$. В частност $AD < AB$. Но $AD = BC$ и $AM = MB$, откъдето ΔMBC е също равнобедрен. Тъй като $\angle ABC = 180^0 - \angle BAD = 180^0 - 76^0 = 104^0$, то от ΔMBC имаме:

$$\angle MCB = \frac{1}{2}(180^0 - 104^0) = 38^0.$$

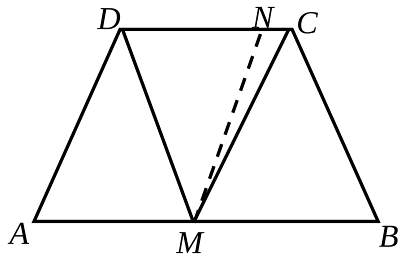


6. Отг. 3. Нулата е цифра на единиците на едно от числата. Сумата на останалите цифри на единиците е най-много $9+8+7+6=30$. Различните възможности за сумата на единиците на петте числа са три: 10, 20 и 30. Тъй като сумата на всички цифри е $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, то различните възможности за сумата на десетиците на петте числа са съответно: 35, 25 и 15. Заключаваме, че различните възможности за сумата на петте числа са $35.10+10=360$, $25.10+20=270$ и $15.10+30=180$. Ето реализации (които не са единствени) на всяка от възможностите:

$90+81+72+63+54=360$, $30+49+58+61+72=270$, $10+29+38+47+56=180$.

Следователно отговорът на задача е 3.

7. Отг. 4. Ще докажем, че *AMCD* е успоредник. Ако допуснем противното, следва, че върху правата *CD* съществува точка *N* така, че *AMND* е успоредник. Възможни са 2 случая: точката *N* е от вътрешността на отсечката *DC* и *N* е извън отсечката *DC* така, че *C* е между *D* и *N*. В първия случай периметърът на ΔAMD е равен на периметъра на ΔDMN. От друга страна, от ΔMCN по неравенството на триъгълника следва, че $MC+CN>MN$ и следователно периметърът на ΔMCD е по-голям от периметъра на ΔDMN, т.е. от периметъра на ΔAMD, което противоречи на условието на задачата. Във втория случай периметърът на ΔMCD ще се окаже по-малък от периметъра на ΔDMN. Следователно наистина *AMCD* е успоредник. Но тогава $AM=CD$. По същия начин следва, че *MBCD* е успоредник и $BM=CD$. Така получаваме, че $CD=\frac{1}{2}AB=4$.



<u>*Оценяване*</u>: За доказване, че единият от двата четириъгълника *AMCD* и *MBCD* е успоредник, се присъждат 7 точки. За доказване или поне споменаване, че по аналогичен начин и вторият четириъгълник е успоредник, се присъждат 2 точки. За окончателно пресмятане, че $CD=\frac{1}{2}AB=4$, се присъжда 1 точка.