ДЕВЕТНАДЕСЕТИ ОБЛАСТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „ПЕРПЕРИКОН“ С МЕЖДУНАРОДНО УЧАСТИЕ КЪРДЖАЛИ, 30 ноември 2019 г.

Т Е М А   З А 9 К Л А С

Първите 5 задачи се оценяват с по 3 точки, задача 6 е с отворен отговор и се оценява с 5 точки, а задача 7 е с описание на решението и се оценява с 10 точки.

Време за работа 120 мин.

Задача 1. От буквите в думата **ПЕРПЕРИКОН** е избрана една по случаен начин. Каква е вероятността тя да е измежду тези, които участват в думата повече от един път?

A) 0,1 **B)** 0,2 **C)** 0,3 **D)** 0,4 **E)** 0,6

Задача 2. Измежду всички произведения по двойки на естествените числа от 1 до 100 включително е избрано едно произведение по случаен начин. Каква е вероятността то да се дели на 3? (Множителите във всяко произведение са различни.)

A) $\frac{73}{200}$ **B)** $\frac{87}{175}$ **C)** $\frac{83}{150}$ **D)** $\frac{91}{100}$ **E)** $\frac{49}{50}$

Задача 3. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $x^2-7x+4=0$, да се пресметне $|x_1-x_2|$.

A) $\sqrt{33}$ **B)** $\sqrt{32}$ **C)** $\sqrt{31}$ **D)** $\sqrt{30}$ **E)** $\sqrt{29}$

Задача 4. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с $BC=AD=6\,\text{cm}$. Ако $\angle AEB=60^0$, където E е пресечната точка на продълженията на страните AD и BC, да се намери разстоянието между средите на диагоналите на четириъгълника.

A) 7 cm **B)** 6 cm **C)** 5 cm **D)** 4 cm **E)** 3 cm

Задача 5. В кутия има 6 червени и 4 сини топки. По случаен начин от кутията се изваждат 5 топки. Каква е вероятността 2 от тях да са червени и 3 да са сини?

A) $\frac{5}{42}$ **B)** $\frac{5}{21}$ **C)** $\frac{19}{252}$ **D)** $\frac{31}{126}$ **E)** $\frac{5}{63}$

Задача 6. В парк има 2 алеи, съответно с m на брой и n на брой дървета. Средната височина на дърветата от първата алея е 205 cm, а на тези от втората алея е 196 cm. Да се намери отношението $m:n$, ако средната височина на всички дървета в парка е 200 cm.

Задача 7. Всяко от уравненията $ax^2+3bx+3c=0$ и $3(a+b)x^2+3(c-b)x+a-3c=0$, където a, b и c са различни положителни реални числа, има два различни реални корена. Ако сборът от четирите корена на двете уравнения е равен на тяхното произведение, да се докаже, че по-малкият корен на второто уравнение е равен на -1.

О Т Г О В О Р И   И   Р Е Ш Е Н И Я

1. **Отг. Е).** Три от буквите участват повече от един път (по два пъти) в думата. Случаите, в които може да се избере такава буква, са 6. Тъй като всички букви са 10, търсената вероятност е $\frac{6}{10} = 0,6$.

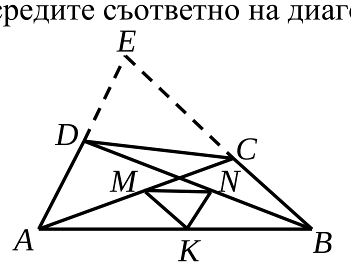
2. **Отг. С).** Възможните двойки са C_{100}^{2}. Тъй като $100:3 = 33$(ост. 1), измежду естествените числа от 1 до 100 включително има точно $100 - 33 = 67$, които не се делят 3. С тях могат да се образуват C_{67}^{2} двойки. Следователно произведенията, които не се делят на 3, са $C_{100}^{2} - C_{67}^{2}$ и търсената вероятност е

$$\frac{C_{100}^{2} - C_{67}^{2}}{C_{100}^{2}} = 1 - \frac{C_{67}^{2}}{C_{100}^{2}} = 1 - \frac{67.66}{100.99} = 1 - \frac{67}{50.3} = \frac{150-67}{150} = \frac{83}{150}.$$

3. Отг. А). От формулите на Виет имаме $x_1 + x_2 = 7$ и $x_1 x_2 = 4$. Тогава

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{49 - 16} = \sqrt{33}.$$

4. Отг. Е). Нека *M*, *N* и *K* са средите съответно на диагоналите *AC*, *BD* и страната *AB*.



MK и *NK* са средни отсечки съответно в триъгълниците *ABC* и *ABD*. Следователно $MK = NK = 3$cm. Оттук още следва, че $\angle MKN$ и $\angle AEB$ са ъгли с взаимно успоредни рамене. Тогава $\angle MKN = \angle AEB = 60^0$. Получаваме, че в равнобедрения ΔMNK един от ъглите е равен на 60^0 и следователно триъгълникът е равностранен. Тогава $MN = 3$cm.

5. В). Броят на всички топки в кутията е 10 и 5 от тях могат да се изберат по C_{10}^{5} начина. Изборът на 2 топки от 6 червени може да стане по C_{6}^{2} начина, а изборът на 3 топки от 4 сини можее да стане по C_{4}^{3} начина. Благоприятните случаи са $C_{6}^{2} \cdot C_{4}^{3}$ и търсената вероятност е $\frac{C_{6}^{2} \cdot C_{4}^{3}}{C_{10}^{5}} = \frac{6.5.4.3.2.5!}{2!.3!.10.9.8.7.6} = \frac{5}{21}$.

6. Отг. 0,8. Нека дърветата от първата алея са $x_1, x_2, ..., x_m$, а тези от втората алея са $y_1, y_2, ..., y_n$. Тогава $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_m}{m} = 205$, откъдето $x_1 + x_2 + ... + x_m = 205m$. Аналогично $\frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n} = 196$ и $y_1 + y_2 + ... + y_n = 196n$. Оттук $\frac{205m + 196n}{m+n} = 200$ и $205m + 196n = 200(m+n)$, т.е. $5m = 4n$ и $5\frac{m}{n} = 4$. Следователно $\frac{m}{n} = \frac{4}{5} = 0,8$.

7. Ако x_1 и x_2 са корените на първото уравнение, а x_3 и x_4 са корените на второто, с помощта на формулите на Виет условието от задачата се записва във вида:
$-\dfrac{3b}{a}-\dfrac{c-b}{a+b}=x_1+x_2+x_3+x_4=x_1x_2x_3x_4=\dfrac{3c}{a}\cdot\dfrac{a-3c}{3(a+b)}$, т.е. $-\dfrac{3b}{a}-\dfrac{c-b}{a+b}=\dfrac{3c}{a}\cdot\dfrac{a-3c}{3(a+b)}$,
откъдето $-3ab-3b^2-ac+ab=ac-3c^2$. Следователно $-2ab-2ac+3c^2-3b^2=0$ и $(b+c)(3(c-b)-2a)=0$. Тъй като $b+c\neq 0$ (числата b и c са положителни по условие), то $(3(c-b)-2a)=0$, т.е. $3(c-b)=2a$. Сега заместваме $x=-1$ във второто уравнение. Получаваме $3(a+b)-3(c-b)+a-3c=0$ и оттук $4a-6(c-b)=0$, т.е. $2a-3(c-b)=0$, което е изпълнено съгласно доказаното по-горе. Заключаваме, че $x=-1$ е корен на второто уравнение. Съгласно формулата на Виет за произведението на двата корена на второто уравнение имаме, че вторият корен е равен на $\dfrac{a-3c}{3(a+b)}:(-1)=\dfrac{3c-a}{3(a+b)}$.
Условието $\dfrac{3c-a}{3(a+b)}>-1$ е еквивалентно на $3c-a>-3a-3b$, т.е. на $2a>-3(b+c)$. Последното е изпълнено, защото по условие числата a, b и c са положителни. С това доказахме, че $x=-1$ е по-малкият от двата корена на второто уравнение.

<u>*Оценяване*</u>: За правилно изразяване на сбора и произведението на четирите корена чрез формулите на Виет се присъждат 2 точки. За получаване на зависимостта $3(c-b)=2a$ се присъждат 3 точки. За доказване, че $x=-1$ е корен на второто уравнение се присъждат 2 точки, а за доказване, че коренът $x=-1$ е по-малък от другия корен, се присъждат 3 точки.