ДЕВЕТНАДЕСЕТИ ОБЛАСТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „ПЕРПЕРИКОН“ С МЕЖДУНАРОДНО УЧАСТИЕ КЪРДЖАЛИ, 30 ноември 2019 г.

Т Е М А   З А   10   К Л А С

Първите 5 задачи се оценяват с по 3 точки, задача 6 е с отворен отговор и се оценява с 5 точки, а задача 7 е с описание на решението и се оценява с 10 точки.

Време за работа 120 мин.

Задача 1. Намерете броя на целите решения на неравенството $|2x-5| \le 3$.

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** безброй много

Задача 2. Даден е ΔABC с ъгъл 60^0 при върха C. Височините от върховете A и B пресичат съответно страните BC и AC в точки A_1 и B_1. Да се намери лицето на четириъгълника ABA_1B_1, ако лицето на ΔABC е 12 cm^2 .

A) 10 cm^2 **B)** 9 cm^2 **C)** 8 cm^2 **D)** 7 cm^2 **E)** 6 cm^2

Задача 3. Нека три различни ненулеви цифри са такива, че сборът на двуцифрените числа, които се записват с две различни цифри измежду дадените, е възможно най-малък. Да се намери средното аритметично на трицифрените числа, всяко от които се записва с трите цифри с посоченото свойство.

A) 222 **B)** 228 **C)** 234 **D)** 240 **E)** 246

Задача 4. Намерете сбора на най-малкото и най-голямото естествени числа, които са решения на неравенството $\dfrac{x}{x^2-3x+6} > \dfrac{1}{4}$.

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

Задача 5. Намерете броя на реалните корени на уравнението

$$\sqrt{2x-3}-\sqrt{3x}=2.$$

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

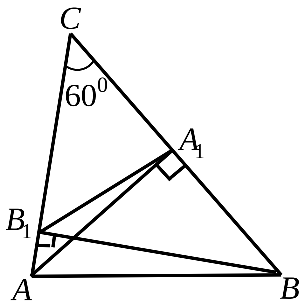
Задача 6. Ако разстоянията от върховете A и B на остроъгълен триъгълник ABC до допирателната през върха C към описаната окръжност около триъгълника са съответно 9 cm и 16 cm, да се намери височината на триъгълника от върха C.

Задача 7. Избрани са девет различни цифри и с тях са образувани 3 трицифрени числа с използване на всички избрани цифри. Ако сборът на трите числа е 2019, посочете пример и намерете цифрата, която не е измежду избраните.

О Т Г О В О Р И   И   Р Е Ш Е Н И Я

1. **Отг. C).** Неравенството е еквивалентно с $-3 \le 2x-5 \le 3$, т.е. с $2 \le 2x \le 8$, откъдето $1 \le x \le 4$. Целите числа в интервала $[1;4]$ са 1, 2, 3 и 4. Техният брой е 4.

2. **Отг. B).** Тъй като точките *A*, *B*, A_1 и B_1 лежат на окръжност с диаметър *AB*, то $\angle BAB_1 + \angle BA_1B_1 = 180^0$. От друга страна $\angle B_1A_1C + \angle BA_1B_1 = 180^0$ като съседни. Тогава $\angle BAB_1 = \angle B_1A_1C$ и следователно триъгълниците *ABC* и A_1B_1C са подобни по 3 ъгъла.



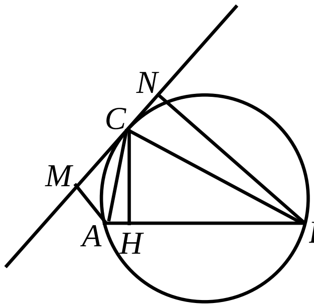
Коефициентът на подобие е $\frac{A_1C}{AC} = \frac{1}{2}$, защото $A_1C = \frac{1}{2}AC$ (катет срещу 30^0 в правоъгълен триъгълник). Лицата на двата триъгълника се отнасят както квадратите на съответните им страни, т.е. $\frac{S_{A_1B_1C}}{S_{ABC}} = \frac{(A_1C)^2}{(AC)^2} = \left(\frac{A_1C}{AC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Така получаваме, че $S_{A_1B_1C} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{12}{4} = 3\text{cm}^2$. Оттук за лицето на четириъгълника имаме $12-3=9$ cm^2.

3. Отг. A). Ако трите цифри с исканото свойство са *a*, *b* и *c*, възможните двуцифрени числа са $10a+b$, $10a+c$, $10b+a$, $10b+c$, $10c+a$ и $10c+b$. Техният сбор е $12(a+b+c)$. Той е най-малък, когато сборът $a+b+c$ е възможно най-малък. Заключаваме, че ненулевите цифри *a*, *b* и *c* трябва да са цифрите 1, 2 и 3 в някакъв ред. Но тогава всички трицифрени числа с тези цифри са 123, 132, 213, 231, 312 и 321. Средното аритметично на тези числа е $\frac{123+132+213+231+312+321}{6} = \frac{1332}{6} = 222$.

4. Отг. A). Тъй като дискриминантата на квадратното уравнение $x^2-3x+6=0$ е отрицателна, то $x^2-3x+6>0$ за всяко *x*. Тогава неравенството от условието на задачата е еквивалентно с $4x > x^2-3x+6$, т.е. с $x^2-7x+6<0$. Корените на квадратното уравнение $x^2-7x+6=0$ са 1 и 6. Следователно решенията на неравенството $x^2-7x+6<0$ са всички числа от интервала $(1;6)$. Естествените числа в този интервал са 2, 3, 4 и 5, а сборът на най-малкото и най-голямото измежду тях е $2+5=7$.

5. D). Допустимите стойности на *x* са решенията на системата $\left|\begin{array}{l} 2x-3 \ge 0 \\ 3x \ge 0 \end{array}\right.$, откъдето $x \ge \frac{3}{2}$. Повдигаме двете страни на уравнението в квадрат и след приведение получаваме $2\sqrt{6x^2-9x}=5x-7$, откъдето $x\geq\frac{7}{5}$. Тъй като $\frac{3}{2}>\frac{7}{5}$, при $x\geq\frac{7}{5}$ след повторно повдигане в квадрат имаме $x^2-34x+49=0$. Полученото уравнение има два реални корена, но само $x=17+\sqrt{249}$ се намира в интервала $x\geq\frac{7}{5}$.

6. Отг. 12 cm. Нека петите на перпендикулярите от върховете A и B към допирателната са съответно M и N, а CH ($H\in AB$) е височината на триъгълника от върха C.



Тъй като вписаният $\angle BAC$ и периферният $\angle BCN$ се измерват с една и съща дъга, те са равни. Оттук следва, че правоъгълните триъгълници AHC и CNB са подобни. Аналогично, вписаният $\angle ABC$ и периферният $\angle ACM$ са равни, така че правоъгълните триъгълници BHC и CMA са също подобни. От двете подобия имаме $\frac{CH}{BN}=\frac{AC}{BC}$ и $\frac{CH}{AM}=\frac{BC}{AC}$. Като умножим левите и десните страни на двете равенства, получаваме $\frac{CH\cdot CH}{BN\cdot AM}=1$ и следователно $(CH)^2=AM.BN=9.16=144=(12)^2$. Оттук $CH=12\,\text{cm}$.

7. Отг. 6. Възможен пример е следният: 320 + 751 + 948 = 2019. Сборът на всичките десет цифри е 45, който брой се дели на 9. Остатъкът от делението на 2019 на 9 е равен на сбора от остатъците на трите трицифрени числа при деление на 9. От друга страна, остатъкът от делението на едно число на 9 е равен на остатъка от делението на сбора от цифрите му на 9. Тъй като остатъкът от делението на 2019 на 9 е 3 и $9-3=6$, заключаваме, че липсващата цифра е 6.

<u>*Оценяване*</u>: За посочване на пример се присъждат 5 точки. За доказване, че 6 не е измежду избраните цифри, се присъждат още 5 точки.