ДЕВЕТНАДЕСЕТИ ОБЛАСТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР„ПЕРПЕРИКОН“ С МЕЖДУНАРОДНО УЧАСТИЕ КЪРДЖАЛИ, 30 ноември 2019 г.

Т Е М А З А 11 К Л А С

Първите 5 задачи се оценяват с по 3 точки, задача 6 е с отворен отговор и се оценява с 5 точки, а задача 7 е с описание на решението и се оценява с 10 точки.

Време за работа 120 мин.

Задача 1. Сред всички единадесетокласници в едно училище броят на момичетата е равен на броя на момчетата. На контролно по математика 10% от всички ученици получили двойки, 30% – тройки, 25% – четворки, 20% – петици, а останалите – шестици. Момчетата са получили 50% от двойките, 25% от тройките, 80% от четворките и $\frac{1}{3}$ от петиците. Намерете отношението на момчетата с отлични оценки към момичетата с отлични оценки.

A) 7:13 **B)** 13:7 **C)** 13:5 **D)** 5:13 **E)** 8:5

Задача 2. Разглеждаме геометричните прогресии с първи член и частно, равни на –2, за които броят n на членовете им е от множеството $\{1, 2, \ldots, 2019\}$, а за сбора S_n на членовете на всяка от тях е изпълнено $S_n > 0$. Намерете сбора на всички S_n.

A) $\frac{2}{9}\left[4^{1010}-3031\right]$ **B)** $4^{2018}-2306$ **C)** $\frac{2}{3}\left[2^{1010}-2341\right]$ **D)** $4^{1010}-1789$ **E)** $2^{1010}-4043$

Задача 3. Една аритметична прогресия с първи член $a_1 = 2$ и разлика 3 има $5n$ члена. Друга аритметична прогресия с първи член $b_1 = 3$ и разлика 2 има $3m$ члена. Ако $a_{3n} = b_{2m}$ и първата прогресия има минимален брой членове, то сборът от броя на членовете на двете прогресии е:

A) 22 **B)** 24 C) 26 **D)** 28 **E)** 30

Задача 4. Сборът на три различни естествени числа е 6049. Ако е премахнато най-малкото, то колко е минималният сбор на останалите две?

A) 4030 **B)** 4031 **C)** 4032 **D)** 4033 **E)** 4034

Задача 5. В ΔABC точката O е център на вписаната окръжност. Ако $AO = 2\sqrt{5}$, $BO = 2\sqrt{10}$ и $CO = 2\sqrt{2}$, намерете периметъра на триъгълника.

A) 15 **B)** 30 **C)** 24 **D)** 32 **E)** 36

Задача 6. Намерете броя на реалните решения на системата:

$$\begin{vmatrix} 2x^2 + y = 3 \\ x^2 - 4y^2 + 3xy = 0 \end{vmatrix}$$

Задача 7. Колко е броят на всички петцифрени числа с различни цифри, за които произведението на две от цифрите им е равно на произведението на другите три цифри?

О Т Г О В О Р И   И   Р Е Ш Е Н И Я

1. Отг. С). Ако момчетата са x, то момичетата са също x и всички единадесетокласници са $2x$. Оценките 2 са $0,1.2x$, оценките 3 са $0,3.2x$, оценките 4 са $0,25.2x$, оценките 5 са $0,2.2x$ и оценките 6 са $0,15.2x$.

От момчетата с оценка с 2 са $0,5.0,1.2x$, с оценка 3 са $0,25.0,3.2x$ с оценка 4 са $0,8.0,25.2x$, а с оценка 5 са $\frac{1}{3}.0,2.2x$. Тогава с оценка 6 са $x-\left(0,1x+0,15x+0,4x+\frac{0,4}{3}x\right)=0,35x-\frac{0,4}{3}x=\frac{0,65}{3}x$ момчета.

От момичетата с оценка 2 са $0,5.0,1.2x$, с оценка 3 са $0,75.0,3.2x$, с оценка 4 са $0,2.0,25.2x$, а с оценка 5 са $\frac{2}{3}.0,2.2x$. Тогава с оценка 6 са $x-\left(0,1x+0,45x+0,1x+\frac{0,8}{3}x\right)=0,35x-\frac{0,8}{3}x=\frac{0,25}{3}x$ момичета.

Търсеното отношение е $\frac{0,65}{3}x:\frac{0,25}{3}x=65:25=13:5$.

2. Отг. А). Тъй като $S_n=(-2)\cdot\frac{(-2)^n-1}{(-2)-1}=\frac{2}{3}\cdot\left((-2)^n-1\right)$, то $S_n>0$, ако $n=2k$. Следователно търсим $S_2+S_4+...+S_{2018}$. Имаме $S_{2k}=\frac{2}{3}(2^{2k}-1)$, $k=1,2,...,1009$, откъдето

$$S_2+S_4+...+S_{2018}=\frac{2}{3}\left[2^2-1+2^4-1+...+2^{2018}-1\right]=\frac{2}{3}\left[4.\frac{4^{1009}-1}{3}-1009\right]=$$

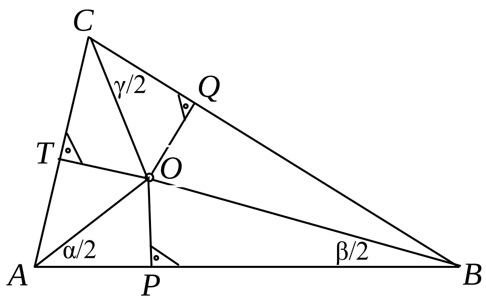
$$=\frac{2}{9}\left[4^{1010}-4-3027\right]=\frac{2}{9}\left[4^{1010}-3031\right].$$

3. Отг. А). От условието $a_{3n}=b_{2m}$ следва, че $2+(3n-1).3=3+(2m-1).2$, откъдето $9n=4m+2$ и следователно n е четно. Минималният брой членове на първата прогресия се получава при $n=2$ и той е 5.2 = 10. Тъй като $m=4$, броят на членовете на втората прогресия е 3.4 =12 и търсеният сбор е 22.

4. Отг. Е). Нека $x<y<z$ и $x+y+z=6049$. Тъй като 6049 : 3 = 2016,33…, то x не може да е по-голямо от 2016 (в противен случай сборът на трите числа ще е по-голям от 6049). Ако $x=2016$, то y и z са минимално равни на 2017 и 2018 и сборът на трите числа е по-голям от 6049. Ако $x=2015$, то $y+z=4034$ и единствената възможност е $y=2016$ и $z=2018$. Така, максималната стойност на x е $x=2015$, при което сборът на останалите две числа е възможно най-малък и е равен на 4034.

5. Отг. С). Нека P, Q и T са проекциите на O съответно върху страните AB, BC и AC. Тогава $OP=OQ=OT=r$, където r е радиусът на вписаната окръжност. Ако използваме обичайните означения за страните и ъглите на триъгълника, имаме $AP=p-a$, $PB=p-b$ и $CT=p-c$. Тогава $AP+BQ+CT=p$. Добре известно е, че

$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=1-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Използвайки правоъгълните триъгълници OAP, OBQ и OCT, това равенство става $\frac{r^2}{AO^2}+\frac{r^2}{BO^2}+\frac{r^2}{CO^2}=1-2\frac{r}{AO}\cdot\frac{r}{BO}\cdot\frac{r}{CO}$. Оттук $r^2\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{8}\right)=1-\frac{r^3}{40}$, т.е. $\frac{r^2}{5}+\frac{r^3}{40}-1=0$ и $r^3+8r^2-40=0$. Имаме $r^3+8r^2-40=(r-2)(r^2+10r+20)=0$. Тъй като корените на квадратното уравнение $r^2+10r+20=0$ са отрицателни, получаваме единствено решение $r=2$. Сега $AP=\sqrt{AO^2-r^2}=\sqrt{20-4}=\sqrt{16}=4$, $BQ=\sqrt{BO^2-r^2}=\sqrt{40-4}=\sqrt{36}=6$ и $CT=\sqrt{CO^2-r^2}=\sqrt{8-4}=\sqrt{4}=2$. Тогава $p=AP+BQ+CT=4+6+2=12$ и $2p=24$.



6. Отг. 4. Ако $y=0$, от второто уравнение следва, че $x=0$, което не е възможно заради първото уравнение. Следователно $y\neq 0$. Разделяме второто уравнение на y^2 и полагаме $\frac{x}{y}=t$. Имаме $t^2+3t-4=0$, чийто корени са $t=1$ и $t=-4$. В първия случай $x=y$ и първото уравнение става $2x^2+x-3=0$. Корените му са $x=1$ и $x=-\frac{3}{2}$. Двойките $(x;y)=(1;1)$ и $(x;y)=\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ удовлетворяват и второто уравнение (то се превръща в тъждество). Така получаваме две решения на системата. Във втория случай $x=-4y$ и първото уравнение става $32y^2+y-3=0$, което има два реални корена. Тъй като второто уравнение отново става тъждество при $x=-4y$, получаваме още две решения на системата. Окончателно, системата има 4 решения.

7. Отг. 480. Да забележим, че цифрите 0, 5 и 7 не могат да участва в записа на числата. **(1 точка)**

<u>Ако цифрата 9 участва</u> в записа и тя е в едната група цифри (даващи едното произведение), в другата трябва да са 3 и 6. В групата с 9 трябва да е 2 или 4. Оттук получаваме две възможности за петцифрените числа: да са образувани с цифрите 1, 2, 3, 6 и 9 или с цифрите 2, 3, 4, 6 и 9. В двете групи съществуват реализации, защото 6.3 = 9.2 и 6.3.2 = 9.4. Броят на петцифрените числа в този случай е $2.5!=240$. **(3 точки)**

<u>Ако цифрата 8 участва</u> в записа и тя е в една от групите, в другата трябва да са 2 и 4 или 4 и 6. Случаят с 2 и 4 в една група не може да се реализира. Остава възможността 2 и 6 да са в една група. Оттук получаваме една възможност за петцифрените числа: да са образувани с цифрите 1, 3, 4, 6 и 8. Реализация е възможна,

защото 6.4 = 8.3. Броят на петцифрените числа в този случай е $5! = 120$.
(3 точки)

<u>Ако цифрите 8 и 9 не участват</u> в записа, остават 1, 2, 3, 4 и 6. От тази група се получава реализация, защото 4.3 = 6.2. Броят на петцифрените числа в този случай е $5! = 120$. **(3 точки)**

Окончателно отговорът на задачата е $240 + 120 + 120 = 480$.