ДЕВЕТНАДЕСЕТИ ОБЛАСТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „ПЕРПЕРИКОН“ С МЕЖДУНАРОДНО УЧАСТИЕ КЪРДЖАЛИ, 30 ноември 2019 г.

Т Е М А З А 12 К Л А С

Първите 5 задачи се оценяват с по 3 точки, задача 6 е с отворен отговор и се оценява с 5 точки, а задача 7 е с описание на решението и се оценява с 10 точки.

Време за работа 120 мин.

Задача 1. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{4x-4}$.

A) 0 **B)** 1/4 **C)** 4 **D)** 1 **E)** ∞

Задача 2. Ако $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{ax^4+4}}{2x^2-\sqrt{x+1}}=2$, то a е равно на:

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 16 **E)** няма такава реална стойност на a

Задача 3. В трапец $ABCD$ $(AB \parallel CD,\ AB > CD)$ диагоналите AC и BD се пресичат в точка O под прав ъгъл. Ако $AO = 2$, $DO = 1$ и $S_{ABCD} = 8$, да се намери лицето на ΔAOB.

A) $1+2\sqrt{3}$ **B)** $2+\sqrt{5}$ **C)** $3+2\sqrt{2}$ **D)** $5\sqrt{2}$ **E)** $5+2\sqrt{2}$

Задача 4. Ако $x \in [0;2\pi]$, намерете сбора от всички корени на уравнението

$$\sin x = \cos 2x.$$

A) $\dfrac{\pi}{6}$ **B)** $\dfrac{\pi}{2}$ **C)** π **D)** $\dfrac{3\pi}{2}$ **E)** $\dfrac{5\pi}{2}$

Задача 5. Намерете сбора от корените на уравнението $\log_x(2-x)=2$.

A) 0 **B)** –1 **C)** 1 **D)** –2 **E)** уравнението няма реални корени

Задача 6. Намерете най-малкото естествено число n, за което числото $n+13$ се дели на 17, а числото $2n+43$ се дели на 13.

Задача 7. Нека n е броят на всички четирицифрени числа с различни цифри, в чиито запис участват само цифрите 0, 1, 2, 7, 8, 9, а m е броят на всички трицифрени числа, в чиито запис участват само цифрите 0, 1, 2, 5, 7. Да се намери разликата $n-m$.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

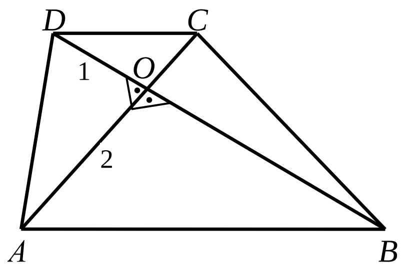
1. Отг. B). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{4x-4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x-(x-1)}{4(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x)(x-1)-(x-1)}{4(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-1}{4}=\dfrac{1}{4}$.

2. Отг. D). Ако a е равно на 0, границата би била 0. Следователно $a\neq 0$. Имаме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+x^2\sqrt{a+\frac{4}{x^4}}}{x^2\left(2-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}+\sqrt{a+\frac{4}{x^4}}\right)}{x^2\left(2-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}\right)}=\frac{\sqrt{a}}{2}=2\ \Rightarrow\ \sqrt{a}=4\ \Rightarrow\ a=16\ .$$

3. Отг. C).



$S_{\Delta AOD}=\dfrac{2.1}{2}=S_{\Delta BOC}$

$\dfrac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta DOC}}=\dfrac{AO}{OC}=\sqrt{\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta DOC}}}\Rightarrow S_{\Delta AOD}=\sqrt{S_{\Delta AOB}.S_{\Delta DOC}}$.

Нека $S_{\Delta AOB}=x$, $S_{\Delta DOC}=y\ \Rightarrow\ \sqrt{xy}=1$ и $x+y+2.1=8$

$\left|\begin{array}{l} xy=1\\ x+y=6\end{array}\right.\Rightarrow (x;y)=(3+2\sqrt{2};3-2\sqrt{2})$ и $(x;y)=(3-2\sqrt{2};3+2\sqrt{2})$. Но $x>y$, откъдето търсеното лице е $x=S_{\Delta AOB}=3+2\sqrt{2}$.

4. Отг. E).

$$\sin x=\cos 2x$$

$$\sin x=1-2\sin^2 x \text{. Ако } \sin x=t\text{, то}$$

$$2t^2+t-1=0,\ D=9,\ t_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}=-1 \text{ и } \frac{1}{2}$$

$$\sin x=-1\ \cup\ \sin x=\frac{1}{2} \text{ и } x\in[0;2\pi].$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{3\pi}{2}\ \cup\ x=\frac{\pi}{6} \text{ и } x=\frac{5\pi}{6}.$$

Следователно търсеният сбор е $\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{15\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{2}$.

5. Отг. E).

$$\log_x(2-x)=2$$

$$\text{ДМ: }\left|\begin{array}{l} x>0\\ x\neq 1\\ x<2\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad x\in(0;1)\cup(1;2)$$

$\log_x(2-x)=\log_x x^2\ \Leftrightarrow\ 2-x=x^2$, откъдето $x^2+x-2=0$, чиито корените са $x_1=1$ и $x_2=-2$. Получените стойности са извън ДМ и следователно сборът от корените не съществува.

6. Отг. 89. Ако $n+13$ се дели на 17, то и $2n+26$ се дели 17. Следователно и $2n+26+17=2n+43$ се дели на 17. Числата 13 и 17 са взаимнопрости. Ако $2n+43$ се дели и на 13, то $2n+43$ се дели на 13.17 = 221. Най-малкото естествено число, което се дели на 221, е 221. Заключаваме, че $2n+43=221$ и търсеният отговор е $n=89$.

7. Отг. 200. На първо място не може да стои „0“. Възможностите за цифрата на първо място са 5. На другите три позиции могат стоят останалите 4 цифри и „0“. Възможностите са броят на вариациите от 5 числа от клас 3, т.е. V_5^3 . Следователно всички четирицифрени числа са $n=5.V_5^3=5.5.4.3=300$ **(5 точки)**. За трицифрените числа отново на първо място не може да стои „0“. Възможностите за цифрата на първо място са 4. На другите две позиции може да стои коя да е цифра, защото се допускат повторения и не трябва да изключваме вече избраната първа цифра. Възможностите са вариациите с повторение от 5 числа от клас 2, т.е. $5^2=25$. Следователно всички трицифрени числа са $m=4.25=100$. Окончателно отговорът на задачата е $n-m=300-100=200$. **(5 точки)**