ДВАДЕСЕТ И ПЪРВИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „ПЕРПЕРИКОН“ С МЕЖДУНАРОДНО УЧАСТИЕ
26 ноември 2022 г.

Т Е М А   З А   9   К Л А С

Първите 5 задачи се оценяват с по 3 точки, задача 6 е с отворен отговор и се оценява с 5 точки, а задача 7 е с описание на решението и се оценява от 0 до 10 точки.

Време за работа 120 мин.

Задача 1. Измежду естествените числа от 1 до 100 включително е избрано едно число по произволен начин. Каква е вероятността избраното число да е степен на просто число със степенен показател по-голям от единица?

A) 0,3 **B)** 0,2 **C)** 0,1 **D)** 0,05 **E)** 0,025

Задача 2. Измежду естествените числа от 1 до 10 включително са избрани три числа по произволен начин. Каква е вероятността сборът на всеки две числа от избраните да се дели на 4?

A) $\frac{3}{200}$ **B)** $\frac{1}{120}$ **C)** $\frac{2}{251}$ **D)** $\frac{1}{150}$ **E)** $\frac{1}{160}$

Задача 3. Даден е триъгълник *ABC* с $AB = 8$ и $\angle BAC = 60^0$. Окръжност с диаметър *AB* и център средата на *AB* пресича страната *BC* в точка *M* и страната *AC* в точка *N*. Да се намери дължината на отсечката *CN*, ако *AM* е ъглополовяща на $\angle BAC$.

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

Задача 4. Ако за реалните числа a и b е изпълнено равенството $\frac{2a}{a+b} + \frac{3b}{a-b} = 3$, колко различни стойности може да има дробта $\frac{a}{b}$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** безброй много

Задача 5. Да се намери броят на квадратните тричлени $f(x) = x^2 + mx + n$, за които m и n са реални корени на уравнението $f(x) = 0$.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** безброй много

Задача 6. Разполагате с еднакви по големина кубчета, част от които са сини, а другите са червени. Построени са 31 кули с поставяне на не повече от четири кубчета едно върху друго. Колко най-малко от построените кули е възможно да са еднакви?

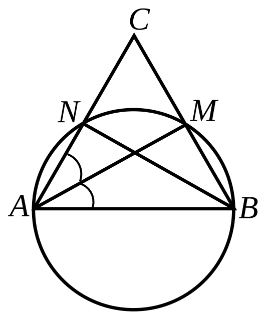
Задача 7. Една книга има 100 страници, които са номерирани последователно с естествените числа от 1 до 100. Колко листа най-малко трябва да се откъснат от книгата (незадължително последователни) така, че произведението от номерата на страниците от тях да се дели със сигурност на 720?

О Т Г О В О Р И   И   Р Е Ш Е Н И Я

1. Отг. С). Степените на простите числа от условието на задачата, чиито степенни показатели са по-големи от 1, са: 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 3^2, 3^3, 3^4, 5^2 и 7^2. Техният брой е 10. Следователно търсената вероятност е $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

2. Отг. В). За да бъде изпълнено условието на задачата, трябва за трите избрани числа да е изпълнено: да се делят на 4 или да дават остатък 2 при деление с 4. Тъй като измежду числата от 1 до 10 има само две, които се делят на 4 (4 и 8), то първата възможност отпада. Втората възможност е изпълнена единствено в случая, когато трите избрани числа са 2, 6 и 10. От друга страна броят на всички тройки числа е равен на броя на комбинациите от 10 числа от клас 3, т.е. C_{10}^3. Следователно търсената вероятност е $\frac{1}{C_{10}^3} = \frac{1}{\frac{10.9.8}{1.2.3}} = \frac{1.2.3}{10.9.8} = \frac{1}{120}$.

3. Отг. А). Да забележим, че $\angle AMB = 90^0$. Тъй като AM е височина и ъглополовяща в ΔABC, то триъгълникът е равнобедрен, т.е. $AB = AC$. От друга страна $\angle BAC = 60^0$ по условие и заключаваме, че ΔABC е равностранен. Тогава $AC = AB = 8$. Тъй като BN е височина в ΔABC, а следователно и медиана, то $CN = \frac{1}{2}AC = 4$.



4. Отг. В). Задачата има смисъл при $a \neq \pm b$. Ясно е, че $a \neq 0$, защото ако допуснем, че $a = 0$, от условието следва $\frac{3b}{-b} = 3$, т.е. $-3 = 3$, което е невъзможно. Аналогично $b \neq 0$, защото ако допуснем, че $b = 0$, от условието следва $\frac{2a}{a} = 3$, т.е. $2 = 3$, което също е невъзможно. Сега да разделим числителите и знаменателите на двете дроби от условието с b. Получаваме $\frac{2\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1} + \frac{3}{\frac{a}{b}-1} = 3$. Ако $\frac{a}{b} = x$, то $\frac{2x}{x+1} + \frac{3}{x-1} = 3$. При това $x \neq \pm 1$, защото $a \neq \pm b$. Оттук $x^2 - x - 6 = 0$, чиито корени са -2 и 3. Заключаваме, че отговорът на задачата е 2.

5. Отг. С). От условието на задачата следват равенствата $m^2 + m^2 + n = 0$ и $n^2 + mn + n = 0$. От първото намираме $n = -2m^2$, което заместваме във второто и получаваме $4m^4 - 2m^3 - 2m^2 = 0$. Оттук $2m^2(2m^2 - m - 1) = 0$ и следователно $m = 0$, $m = 1$ или $m = -\frac{1}{2}$. Съответните стойности на n са: $n = 0$, $n = -2$ и $n = -\frac{1}{2}$.Възможните квадратни тричлени с исканото свойство са 3 на брой:

$$f(x) = x^2, \ f(x) = x^2 + x - 2 \text{ и } f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

6. Отг. 2. С височина едно кубче могат да се построят 2 различни кули – една с червено кубче и една със синьо кубче. С височина две кубчета могат да се построят 2^2 различни кули, с височина три кубчета могат да се построят 2^3 различни кули, а с височина четири кубчета могат да се построят 2^4 различни кули. Общо могат да се построят $2+2^2+2^3+2^4=2+4+8+16=30$ различни кули. Оттук следва, че измежду построените 31 кули поне 2 ще са еднакви.

7. Отг. 31. Да забележим, че $720=2^4.3^2.5$. Измежду числата от 1 до 100 има точно 20, които се делят на 5. Тези 20 числа са номера на 20 страници, които заедно със страниците от листовете, на които принадлежат, определят 40 страници. Останалите 60 страници са с номера, които не се делят на 5. Тези 60 страници принадлежат на 30 листа. Следователно, ако се откъснат 31 листа, между тях ще има поне един със страница, номерът на която се дели на 5. Заключаваме, че трябва да се откъснат поне 31 листа. Ще докажем, че това е отговорът на задачата. Наистина, нека са откъснати произволни 31 листа от книгата. Да отбележим, че те съдържат 31 страници с четни номера и следователно произведението от номерата на тези 31 страници със сигурност се дели на 2^4. Измежду числата от 1 до 100 има точно 33, които се делят на 3. Тези 33 числа са номерата на 33 страници, които принадлежат на 33 листа. Останалите 17 листа от книгата не съдържат страници с номера, кратни на 3. Измежду откъснатите 31 листа ще има поне 14 (31 – 17 = 14) със страници, чиито номера са кратни на 3. Следователно произведението от номерата на тези 14 страници със сигурност се дели на 3^2. Заключаваме, че произведението от номерата на страниците от тези 31 произволно откъснати листове се дели на 720, което трябваше да се докаже.

Оценяване: По 1 точка се присъжда за определяне броя на числата от 1 до 100, които се делят на 5, на 3 и на 2. За доказване, че броят на листовете трябва да е поне 31, се присъждат 3 точки. За доказване, че търсеният брой е точно 31 се присъждат 4 точки. Само за познат отговор без обяснения или с грешни обяснения се присъждат 2 точки.

зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	зад. 7
C	**B**	**A**	**B**	**C**	**2**	**31**