ДВАДЕСЕТ И ПЪРВИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „ПЕРПЕРИКОН“ С МЕЖДУНАРОДНО УЧАСТИЕ 26 ноември 2022 г.

Т Е М А   З А   12   К Л А С

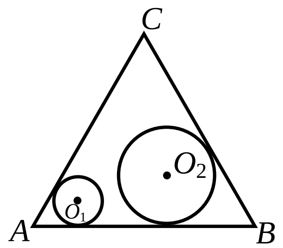
Първите 5 задачи се оценяват с по 3 точки, задача 6 е с отворен отговор и се оценява с 5 точки, а задача 7 е с описание на решението и се оценява от 0 до 10 точки.

Време за работа 120 мин.

Задача 1. Ако (x, y) е решение на системата $\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1}=y+1\\ \sqrt{y^2+5}=x+1\end{array}\right.$, то $4x+y$ е равно на:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 6

Задача 2. В равностранен ΔABC са вписани две окръжности с радиуси 1 cm и 2 cm, както е показано на чертежа. Ако разстоянието между центровете им O_1 и O_2 е $O_1O_2=\sqrt{13}$ cm, намерете лицето на триъгълника в квадратни сантиметри.



A) $\dfrac{75\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$ **C)** $\dfrac{25\sqrt{2}}{3}$ **D)** $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ **E)** $5\sqrt{13}$

Задача 3. В 12:00 часа на обяд е измерена температурата в градуси в 13 града, като резултатите са следните:

2, 3, 3, 4, 3, 5, x, 5, 6, 4, 3, 3, 2.

Ако x може да приема само цели стойности в интервала [1;6], то каква е вероятността средната стойност на този ред да е не по-малка от $\dfrac{Mo+Me+1}{2}$, където Mo е модата, а Me е медианата на реда?

A) 0 **B)** $\dfrac{1}{4}$ **C)** $\dfrac{1}{2}$ **D)** $\dfrac{2}{3}$ **E)** 1

Задача 4. Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$ с основа правоъгълния ΔABC ($\angle ACB=90^\circ$) и околни ръбове $DA=5$, DB, който е перпендикулярен на основата, и $DC=\sqrt{17}$. Намерете дължината на ръба BC, ако обемът на пирамидата е максимален?

A) $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$ **B)** $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ **C)** $\dfrac{17}{2}$ **D)** $\dfrac{17}{4}$ **E)** 17

Задача 5. Нека x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2-3x+a=0$, а y_1 и y_2 са корени на уравнението $y^2-12y+b=0$. Ако числата x_1, x_2, y_1 и y_2 образуват растяща геометрична прогресия в този ред, да се намери произведението ab.

A) 2 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 32 **E)** 64

Задача 6. Да се намери броят на 5-цифрените естествени числа, които са по-големи от 40 000 и всяка тяхна цифра е по-голяма от стоящата вляво.

Задача 7. Да се докаже, че един триъгълник с дължини на страните a, b и c е равностранен тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

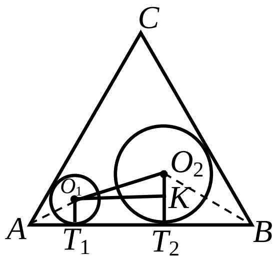
О Т Г О В О Р И   И   Р Е Ш Е Н И Я

1. Отг. Е). Д.М.: $x \ge -1,\ y \ge -1$.

$$\left|\begin{array}{l} x^2+1=(y+1)^2 \\ y^2+5=(x+1)^2 \end{array}\right. + \ \Rightarrow x^2+y^2+6=x^2+y^2+2y+2x+2 \ \Rightarrow y=2-x$$ и заместваме в първото уравнение: $x^2+1=(2-x+1)^2 \ \Rightarrow\ x^2+1=9-6x+x^2 \Rightarrow 6x=8,\ x=\dfrac{4}{3}$ и $y=\dfrac{2}{3}$.

Следователно $4x+y=\dfrac{16}{3}+\dfrac{2}{3}=6$.

2. Отг. В).



Нека $O_1T_1 \perp AB$ и $O_2T_2 \perp AB$ $(T_1, T_2 \in AB)$. От условието следва, че $O_1T_1=1, O_2T_2=2$. Ако $O_1K \perp O_2T_2$ $(K \in O_2T_2)$, то $KT_2=O_2K=1$. Тогава $T_1T_2=O_1K=\sqrt{13-1}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. От ΔAT_1O_1 намираме $\dfrac{AT_1}{O_1T_1}=\text{cotg}30^\circ \Rightarrow AT_1=\sqrt{3}$, а от ΔBT_2O_2 съответно $\dfrac{BT_2}{O_2T_2}=\text{cotg}30^\circ \Rightarrow BT_2=2\sqrt{3}$. Следователно

$$AB=AT_1+T_1T_2+T_2B=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5\sqrt{3} \text{ и } S_{ABC}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(5\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{75\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2.$$

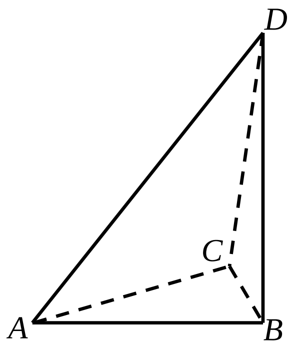
3. Отг. D). Данните са 13 на брой. След подреждането им, редът придобива вида

2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6,

като единственото не е известна позицията на x. Независимо от стойността на x за модата и медианата на реда имаме $Mo=Me=3$. За средната на реда получаваме

$$\frac{2.2+5.3+2.4+2.5+1.6+x}{13}=\frac{43+x}{13}.$$

Тогава $\dfrac{43+x}{13} \ge \dfrac{3+3+1}{2} \Rightarrow \dfrac{43+x}{13} \ge \dfrac{7}{2} \Rightarrow 86+2x \ge 91 \Rightarrow 2x \ge 5 \Rightarrow x \ge 2,5$. Тъй като целите стойности в интервала [1;6] са 6, а тези, които удовлетворяват условието $x \ge 2,5$, са 4, то търсената вероятност е $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.



4. Отг. А). Тъй като BC е ортогоналната проекция на DC върху основата и $AC \perp BC$, то от теорема за трите перпендикуляра следва, че $DC \perp AC$. Следователно ΔDAC е правоъгълен. Тогава $AC=\sqrt{25-17}=2\sqrt{2}$. Ако $BC=x$, то $DB=\sqrt{17-x^2}$ и $V_{ABCD}=\dfrac{S_{ABC}.DB}{3}=\dfrac{x.2\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{17-x^2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{17x^2-x^4}$. Обемът е максимален, когато изразът $17x^2-x^4$ приема най-голяма стойност. Ако $x^2=t$, задачата се свежда до намиране максимума на квадратната функция $f(t)=-t^2+17t$. Това се случва във върха на параболата, която е графика на функцията, т.е. при $t=\dfrac{-17}{-2}=\dfrac{17}{2}$. Следователно $BC=x=\sqrt{\dfrac{17}{2}}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

5. Отг. E). Нека $q > 0$ частното на прогресия. Тогава, от формулите на Виет имаме:

$$x_1 + qx_1 = 3$$
$$qx_1^2 = a$$
$$q^2x_1 + q^3x_1 = 12$$
$$q^5x_1^2 = b\,.$$

Като разделим левите и десните части на третото и първото равенство, получаваме $q^2 = 4$ и следователно $q = 2$. Сега от първото равенство следва, че $x_1 = 1$, от второто $a = 2$ и от четвъртото $b = 32$. Заключаваме, че $ab = 2.32 = 64$.

6. Отг. 6. Първата цифра на числата с исканото свойство е 4 или 5, защото броят на цифрите, които са по-големи от 6, е три. Ако първата цифра е 4, то останалите 4 цифри могат да бъдат избрани измежду цифрите от 5 до 9 включително, които са 5 на брой. Изборът на четири цифри е комбинация от 5 елемента от 4-ти клас. Подреждането на вече избрани четири цифри е еднозначно определено, защото е по големина. Следователно броят на търсените петцифрени числа с първа цифра 4 е $\dfrac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$.

Числото 56 789 е единственото петцифрено число с първа цифра 5, което отговаря на условието на задачата. Следователно търсеният брой е 6.

7. В едната посока твърдението е очевидно. Ако е вярно равенството от условието на задачата, имаме $c^2 - c(a+b) + a^2 + b^2 - ab = 0$ и оттук

$$c_{1,2} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4a^2 - 4b^2 + 4ab}}{2} = \frac{a+b \pm \sqrt{-3a^2 - 3b^2 + 6ab}}{2} =$$

$$= \frac{a+b \pm \sqrt{-3(a^2 + b^2 - 2ab)}}{2} = \frac{a+b \pm \sqrt{-3(a-b)^2}}{2}\,.$$

Тъй като дължината c на една от страните на триъгълника е реално число, то $a = b$ и $c_1 = c_2 = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$, т.е. $a = b = c$ и триъгълникът е наистина равностранен.

<u>Оценяване</u>: За доказване на твърдението в едната посока се присъжда 1 точка, а за другата посока се присъждат 9 точки. При липса на доказателство всяко вярно разсъждение се оценява с 1 точка, но общо с не повече от 3 точки.

зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6
E	**B**	**D**	**A**	**E**	**6**