ДВАДЕСЕТ И ПЪРВИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „ПЕРПЕРИКОН“ С МЕЖДУНАРОДНО УЧАСТИЕ
26 ноември 2022 г.

Т Е М А   З А   11   К Л А С

Първите 5 задачи се оценяват с по 3 точки, задача 6 е с отворен отговор и се оценява с 5 точки, а задача 7 е с описание на решението и се оценява от 0 до 10 точки.

Време за работа 120 мин.

Задача 1. Ако (x, y) е решение на системата $\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1}=y+1\\ \sqrt{y^2+5}=x+1\end{array}\right.$, то $x+y$ е равно на:

A) 1 **B)** 2 **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** 0

Задача 2. Даден е трапец с основи $AB=120$ cm и $CD=20$ cm. Ако точката M е от бедрото BC и $\frac{S_{ABM}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{6}$, то отношението $\frac{CM}{MB}$ е равно на:

A) $\frac{29}{7}$ **B)** $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ **C)** $\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ **D)** 6 **E)** $\frac{3}{2}$

Задача 3. Ако a е цяло число, а x_1, x_2 и x_3 са корените на уравнението

$$x^3-(3+a)x^2-3(6-a)x+18a=0,$$

намерете стойността на израза $x_1+x_2+x_3-a$, като използвате, че корените са цели числа.

A) $2+\sqrt{3}-a$ **B)** $6-3a$ **C)** $5a$ **D)** $3-a$ **E)** 3

Задача 4. В ΔABC точката M е от страната AB, като $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$, а точката N е от страната BC, като $\frac{CN}{NB}=\frac{4}{3}$. Ако AN пресича CM в точката P, намерете $\frac{CP}{PM}+\frac{AP}{PN}$.

A) $\frac{5}{3}$ **B)** 2,5 **C)** 4,5 **D)** 7,5 **E)** 4

Задача 5. В едно училище момчетата сред всички единадесетокласници в паралелките А, Б и В са 40%. Броят на учениците в трите класа е един и същ. Процентът на момчетата в $11^{\text{А}}$ е $\frac{140}{3}\%$, а в $11^{\text{Б}}$ е $\frac{160}{3}\%$. Какъв е процентът на момичетата в $11^{\text{В}}$ клас?

A) 20% **B)** 80% **C)** $\frac{110}{3}\%$ **D)** 30% **E)** 24%

Задача 6. Ако броят на комбинациите без повторения от n елемента от втори клас е m, а броят на комбинациите без повторения от m елемента от втори клас $99n$, да се намерят m и n.

Задача 7. Ако a и b са реални числа, за които $a+b=1$, да се докажат неравенствата:

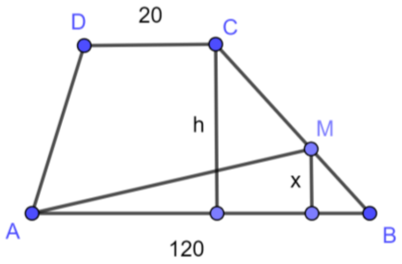
а) $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$; б) $ab\leq\frac{1}{4}$; в) $a^3+b^3\geq\frac{1}{4}$.

О Т Г О В О Р И И Р Е Ш Е Н И Я

1. Отг. В). Д.М.: $y \geq -1,\ x \geq -1$

$$\begin{vmatrix} x^2+1=(y+1)^2 \\ y^2+5=(x+1)^2 \end{vmatrix} + \ \Rightarrow x^2+y^2+6=x^2+y^2+2y+2x+2 \ \Rightarrow x+y=2\,.$$

2. Отг. А).



$S_{ABCD}=70h$ и $S_{ABM}=\dfrac{35}{3}h=\dfrac{120x}{2}=60x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{h}{x}=\dfrac{60.3}{35}=\dfrac{36}{7}=\dfrac{BC}{BM} \ \Rightarrow \dfrac{CM}{BM}=\dfrac{29}{7}$.

3. Отг. Е).

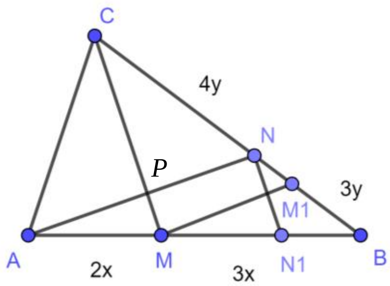
Като разкрием скобите получаваме:

$x^3-3x^2-ax^2-18x+3ax+18a=0 \ \Leftrightarrow x^2(x-a)-3x(x-a)-18(x-a)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ (x-a)(x^2-3x-18)=0,\ x_1=a,\ x_{2,3}=\dfrac{3\pm 9}{2}=6,-3 \Rightarrow\ x_1+x_2+x_3-a=a+6-3-a=3$.

Забележка: Ако се използват формулите на Виет за кубично уравнение, отговорът следва директно: $x_1+x_2+x_3-a=3+a-a=3$.

4. Отг. С).



Нека $AM=2x$, $MB=3x$, $CN=4y$ и $NB=3y$. Построяваме $MM_1 \parallel AN$ $(M_1 \in BN)$. От теоремата на Талес имаме:

1) $\dfrac{NM_1}{M_1B}=\dfrac{2}{3} \ \Rightarrow\ NM_1=\dfrac{6}{5}y$ и $M_1B=\dfrac{9}{5}y$;

2) $\dfrac{CP}{PM}=\dfrac{CN}{NM_1}=\dfrac{4y}{\frac{6}{5}y}=\dfrac{10}{3}$.

Аналогично, построяваме $NN_1 \parallel CM$ $(N_1 \in MB)$. Отново от теоремата на Талес имаме:

1) $\dfrac{BN_1}{MN_1}=\dfrac{3}{4} \ \Rightarrow\ BN_1=\dfrac{9}{7}x$ и $MN_1=\dfrac{12}{7}x$;

2) $\dfrac{AP}{PN}=\dfrac{AM}{MN_1}=\dfrac{2x}{\frac{12}{7}x}=\dfrac{7}{6}$.

Следователно $\dfrac{CP}{PM}+\dfrac{AP}{PN}=\dfrac{10}{3}+\dfrac{7}{6}=\dfrac{9}{2}=4,5$.

5. Отг. В).

Нека броят на учениците във всеки от класовете е x. Момчетата в $11^{А}$, $11^{Б}$ и $11^{В}$ са съответно $\dfrac{140}{3.100}x$, $\dfrac{160}{3.100}x$ и $\dfrac{y}{100}x$, където $y\%$ е процентът на момчетата в $11^{В}$. Тогава всички момчета в 11-ти клас са $\dfrac{x}{100}\left(\dfrac{140}{3}+\dfrac{160}{3}+y\right)=\dfrac{x}{100}(100+y)$, а всички ученици са $3x$. Следователно $100.\dfrac{x.(100+y)}{100.3x}=40 \Rightarrow 100+y=120 \Rightarrow\ y=20\%$ са момчетата в $11^{В}$ клас, а момичетата в $11^{В}$ клас са 80%.

6. Отг. $n = 10$, $m = 45$.

$\left| \begin{array}{l} C_n^2 = m \\ C_m^2 = 99n \end{array} \right.$, където m и n са естествени числа. Следователно $\left| \begin{array}{l} \dfrac{n(n-1)}{2} = m \\ \dfrac{m(m-1)}{2} = 99n \end{array} \right.$ и като заместим m във второто уравнение, получаваме $\dfrac{n(n-1)}{2}\left(\dfrac{n(n-1)}{2} - 1\right) = 198n$, откъдето $n(n-1)\left(n^2 - n - 2\right) = 4.198n$, $(n-1)(n+1)(n-2) = 8.9.11$, $(n-2)(n-1)(n+1) = 8.9.11$.

Следователно $n-2 = 8$, $n-1 = 9$, $n+1 = 11$ или $n = 10 \Rightarrow m = \dfrac{10.9}{2} = 45$.

7. Нека $d = \dfrac{a-b}{2}$. Като заместим b с $1-a$, получаваме $d = \dfrac{a-1+a}{2} = a - \dfrac{1}{2}$. Оттук $a = \dfrac{1}{2} + d$ и $b = 1 - \dfrac{1}{2} - d = \dfrac{1}{2} - d$. Тогава $a^2 + b^2 = \dfrac{1}{4} + d + d^2 + \dfrac{1}{4} - d + d^2 = \dfrac{1}{2} + 2d^2 \ge \dfrac{1}{2}$. Равенство в а) се получава при $a = b$.

б) По-нататък имаме $ab = \left(\dfrac{1}{2} + d\right)\left(\dfrac{1}{2} - d\right) = \dfrac{1}{4} - d^2 \le \dfrac{1}{4}$. Равенство в б) се получава при $a = b$.

в) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 + b^2 - ab$ и като използваме а) и б), получаваме $a^3 + b^3 \ge \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$. Равенство в в) се получава отново при $a = b$.

<u>Оценяване</u>: Подточки а) и б) се оценяват с 3 точки, а подточка в) с 4 точки. Тъй като неравенството между средното аритметично и средното геометрично се отнася за неотрицателни числа, то при използването му в доказателствата се отнема 1 точка. Верни преобразувания се оценяват с по 1 точка при липса на доказателства на твърденията в задачата, но общо с не повече от 3 точки. Ако не е посочено кога се достига поне едно от равенствата, се отнема 1 точка.

зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6
В	**А**	**Е**	**С**	**В**	$n = 10$, $m = 45$