ДВАДЕСЕТ И ПЪРВИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР „ПЕРПЕРИКОН“ С МЕЖДУНАРОДНО УЧАСТИЕ 26 ноември 2022 г.

ТЕМА ЗА 10 КЛАС

Първите 5 задачи се оценяват с по 3 точки, задача 6 е с отворен отговор и се оценява с 5 точки, а задача 7 е с описание на решението и се оценява от 0 до 10 точки.

Време за работа 120 мин.

Задача 1. Цената на една стока била намалявана три пъти последователно с един и същ процент и от 100 лв. станала 51,20 лв. С по колко процента е била намалявана стоката?

A) 15% **B)** 20% **C)** 25% **D)** 30% **E)** 35%

Задача 2. Колко са различните четирицифрени числа, които се записват с една цифра 1, две цифри 2 и една цифра 3?

A) 10 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 24

Задача 3. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) точката M е средата на страната BC. Ако $AM = AB$, да се намери отношението на дължините на страните AC и AB.

A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** 2 **D)** 3 **E)** $3\sqrt{2}$

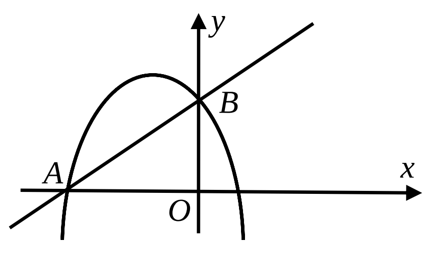
Задача 4. Да се намери броят на реалните решения на уравнението $|x-1| = 2 - x^2$, които изпълняват условието $|x-1| > 1$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

Задача 5. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $(1-a)x^2 - 2x + 4a = 0$ има два различни реални корена, по-големи от 1.

A) $a > \frac{1}{3},\ a \neq \frac{1}{2}$ **B)** $a < 1,\ a \neq \frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ **D)** $\frac{1}{3} < a < 1,\ a \neq \frac{1}{2}$ **E)** $\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3},\ a \neq \frac{1}{2}$

Задача 6. Нека a, b, c и d са реални числа. На чертежа са показани графиките на функциите $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = -ax + d$ спрямо правоъгълна координатна система Oxy. Двете графики се пресичат в точки $A \in Ox$ и $B \in Oy$. Да се намери положителният корен на уравнението $f(x) = 0$.



Задача 7. Медианите AK ($K \in BC$) и CM ($M \in AB$) в правоъгълния ΔABC ($\angle ACB = 90^0$) са взаимноперпендикулярни. Да се намери отношението на дължините на катетите BC и AC.

О Т Г О В О Р И   И   Р Е Ш Е Н И Я

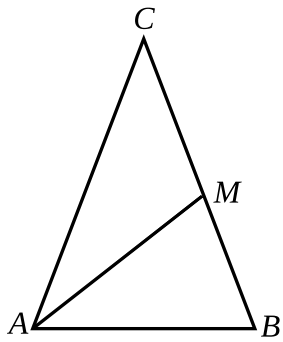
1. Отг. B). Нека всеки път стоката е била намалявана с p%. След първото намаление цената на стоката в лева е била $100-\frac{p}{100}\cdot 100=100-p$, след второто $(100-p)-\frac{p}{100}\cdot(100-p)=\frac{(100-p)^2}{100}$, а след третото

$$\frac{(100-p)^2}{100}-\frac{p}{100}\cdot\frac{(100-p)^2}{100}=\frac{(100-p)^3}{100^2}.$$

От условието следва, че $\frac{(100-p)^3}{100^2}=51,20$, т.е. $(100-p)^3=100^2.51,20=512\ 000=10^3.8^3$. Следователно $100-p=8.10$ и $p=100-80=20\%$. Цената е била намалявана последователно с 20 лв., 16 лв. и 12,80 лв.

2. Отг. B). Да предположим, че двете двойки в числото 1223 са различни и да ги означим с 2_1 и 2_2 . Тогава броят на четирицифрените числа е 4! = 24. Но числата, които се различават единствено с размяна на 2_1 и 2_2, са равни. Следователно получените 24 числа се разделят на групи с по две равни числа. Заключаваме, че различните четирицифрени числа са два пъти по-малко, т.е. те са 12.

3. Отг. A). От условието следва, че ΔBMA е равнобедрен $(AM=AB)$. Двата равнобедрени триъгълника BMA и ABC имат равни ъгли при основата. Заключаваме, че те са подобни. От подобието следва, че $\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{\frac{AC}{2}}$. Оттук $\frac{AC^2}{AB^2}=2$ и следователно $\frac{AC}{AB}=\sqrt{2}$.



4. Отг. B). При $x\le 1$ уравнението става $x^2-x-1=0$, а при $x\ge 1$ то е $x^2+x-3=0$. Корените на първото уравнение са $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, от които само x_1 изпълнява условието $x\le 1$, а на второто са $x_3=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ и $x_4=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, от които само x_4 изпълнява условието $x\ge 1$. Освен това $|x_1-1|=1-x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$ и $|x_4-1|=x_4-1=\frac{\sqrt{13}-3}{2}<1$. Следователно задачата има единствено решение $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

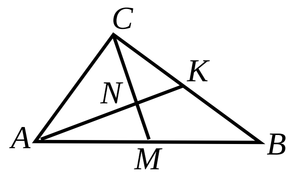
5. Отг. D). При $a\ne 1$ уравнението има винаги два реални корена $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(2a-1)^2}}{1-a}=\frac{1\pm(2a-1)}{1-a}$, т.е. $x_1=\frac{2a}{1-a}$ и $x_2=2$. Задачата се свежда до решаване на неравенствата $\frac{2a}{1-a}>1$ и $\frac{2a}{1-a}\ne 2$. Непосредствено се проверява, че решенията са числата от интервала $\left(\frac{1}{3};1\right)$, които са различни от $\frac{1}{2}$, т.е. търсените решения са $\frac{1}{3}<a<1,\ a\neq\frac{1}{2}$.

6. Отг. 1. От условието следва, че $c=f(0)=g(0)=d>0$. Нека m е абсцисата на точката A. Тогава $0=g(m)=-am+d=-am+c$, откъдето $m=\frac{c}{a}$. Следователно

$$0=f(m)=a\cdot\frac{c^2}{a^2}+b\cdot\frac{c}{a}+c=\frac{c(c+b+a)}{a}.$$

Заключаваме, че $a+b+c=0$. От друга страна $f(1)=a+b+c$. Получаваме, че положителният корен на уравнението $f(x)=0$ е равен на 1.

7. Отг. $\sqrt{2}$. Ще използваме стандартните означения: $AB=c$, $BC=a$ и $AC=b$. Съгласно Питагоровата теорема от правоъгълните триъгълници ABC и AKC имаме $c=\sqrt{a^2+b^2}$ и $AK=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$. Тъй като CM е медиана към хипотенузата на



ΔABC, то $CM=\frac{c}{2}$. Нека N е пресечната точка на медианите. Тогава $CN=\frac{2}{3}CM=\frac{c}{3}$ и $AN=\frac{2}{3}AK=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$. От правоъгълния триъгълник ANC получаваме

$$AC^2=b^2=AN^2+CN^2=\frac{4}{9}\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)+\frac{c^2}{9}=\frac{1}{9}\left(a^2+4b^2+a^2+b^2\right)=\frac{1}{9}\left(2a^2+5b^2\right),$$

откъдето $9b^2=2a^2+5b^2$ и следователно $4b^2=2a^2$. Тогава $\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}=\sqrt{2}$.

<u>*Оценяване*</u>: За изразяване на AK, AN и CN чрез катетите на ΔABC се присъждат по 2 точки. За прилагане теоремата на Питагор за ΔANC се присъждат 2 точки, а за получаване на търсеното отношение – още 2 точки. За частични резултати (например, че пресечната точка на медианите дели медианата в отношение 2 : 1) се присъжда по 1 точка, но общо не повече от 3 точки.

зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	зад. 7
B	**B**	**A**	**B**	**D**	**1**	$\sqrt{2}$