

1. След опростяване на числения израз $(5 + 2\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{6} - 2) \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ се получава

- А) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ Б) $5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$ В) $\sqrt{2}$ Г) $-\sqrt{2}$

2. Събитието $A = \{ \text{При хвърляне на два правилни зара сумата или произведението от точките е четно число} \}$ е:

- А) случайно Б) невъзможно В) малко вероятно Г) достоверно

3. Диагоналите на успоредник $ABCD$ се пресичат в точката O , $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката M е средата на BC , а N е средата на AM . Кой от посочените вектори е равен на $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$?

- А) $\overrightarrow{AN}$ Б) $\overrightarrow{OB}$ В) $\overrightarrow{OC}$ Г) $\overrightarrow{OM}$

4. Бедрото AD на трапеца $ABCD$ е разделено от точките M и N на три равни части. През точките M и N са построени прави, успоредни на AB , които пресичат бедрото BC съответно в точките M_1 и N_1 . Ако $AB = 15$ cm и $CD = 9$ cm дължините на отсечките MM_1 и NN_1 (в сантиметри) съответно са:

- А) 13 и 11 Б) 12 и 10,5 В) 11 и 10 Г) 13 и 10

5. Кое от твърденията е вярно за корените на уравнението $4x^2 + 52x + 61 = 0$:

- А) Уравнението няма реални корени. Б) Уравнението има два корена с различни знаци
В) Уравнението има два положителни корена Г) Уравнението има два отрицателни корена ?

6. За уравнението $x^2 - 5ax + 10a - 1 = 0$ с реален параметър a и корени x_1 и x_2 намерете най- малката стойност на израза $x_1^2 + x_2^2$.

- А) 2 Б) -2 В) -3 Г) 7

7. Страните на правоъгълник са a и b , $b > a$. Построен е негов диагонал и в получените триъгълници са вписани окръжности, които се допират до диагонала в точките M и N . Дължината на MN е:

- А) $\frac{b-a}{2}$ Б) $\frac{b+a}{2}$ В) $b-a$ Г) не може да се определи

8. След привеждане към най- малък общ знаменател на рационалните дробни

$$\frac{x-2}{x^3+8}, \quad \frac{1}{x^2-4} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^2+2x+4},$$

коя от тях получава вида $\frac{x^4-2x^3+8x-16}{(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}$?

А) Първата Б) Втората В) Третата Г) Никоя от посочените

9. Решенията на системата $\begin{cases} x^2+2xy+y^2-2x-2y=0 \\ x^2-y^2-x=8 \end{cases}$ са:

А) $(8;-8)$ и $(-4;2)$ Б) $(8;-8)$ и $(4;-2)$ В) $(-8;8)$ и $(-4;2)$ Г) $(-8;8)$ и $(4;-2)$

10. Нека CH е височина към хипотенузата AB в правоъгълен $\triangle ABC$ ($H \in AB$), а HD и HE ($D \in AC$, $E \in BC$) са ъглополовящи съответно на ъглите AHC и BHC . Ако $DH : HE = 3 : 4$ и лицето на $\triangle ABC$ е 54 cm^2 , дължината на AB (в сантиметри) е:

А) 15 Б) 12 В) 10 Г) 9

11. За кои стойности на реалния параметър a неравенството $\frac{x^2+ax-1}{2x^2-2x+3} < 1$ е изпълнено за всяко реално число x ?

А) само $a = 0$ Б) $(-\infty; -6) \cup (2; \infty)$ В) $(-6; 2)$ Г) не може да се определи

12. Ако $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ стойността на $P = \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \cos \alpha$ е :

А) -9 Б) 9 В) -7 Г) 7

13. Към реда 6, 21, 8, 4, 14, 3 прибавете ново число така, че двата реда да имат една и съща медиана. Средната аритметична стойност на данните от новия ред е:

А) 7 Б) 9 В) 6 Г) 10,5

14. В $\triangle ABC$, $AC = 3 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{9}$. Дължината на медианата m_a е :

А) $2\sqrt{5}$ Б) $\frac{1}{2}\sqrt{161}$ В) $\frac{1}{2}\sqrt{41}$ Г) $\frac{4}{5}\sqrt{21}$

15. Даден е четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$, $CD = DA = 7 \text{ cm}$ и диагонал $AC = 7 \text{ cm}$. Дължината на диагонала BD е :

А) $\frac{55}{7}$ Б) 8 В) 12 Г) 9

Пълните решения с необходимите обосновки на задачи 16 и 17 запишете в листа за отговори на указаните за това места

16. Танкер се пълни с нефт от няколко помпи с еднаква мощност, които се включват последователно една след друга, на равни промеждутъци от време. Те работят до напълването на танкера, след което се изключват едновременно. Ако имаше възможност и да се включат едновременно, то танкерът би се напълнил за 10 часа.

А) Колко часа е работила помпата, която е включена първа, ако помпата, която е включена последна е работила 7 часа?

Б) Възможно ли е помпите да бъдат 7? Обосновете отговора си.

17. Периметърът на правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$) е 72 cm. Разликата между медианата и височината към хипотенузата е 7 cm. Намерете страните на триъгълника.

Ключ с верните отговори 10 клас, 2025 г.

№ на задача	Отговор	Брой точки
1	В	4
2	Г	4
3	А	4
4	А	4
5	Г	4
6	Б	4
7	В	4
8	В	4
9	Г	4
10	А	4
11	В	4
12	Г	4
13	Б	4
14	А	4
15	Б	4
16		Общо 20 точки
16 А)	Нека помпите са n. Определяне на производителност на всяка помпа $\frac{1}{10n}$. За означаване на времето на работа на i-тата помпа с a_i и разглеждането им като аритметична прогресия с $a_n = 7$ Съставяне на уравнението $\frac{1}{10n}(S_n) = 1$ Получаване на $a_1 = 13$ часа.	4 точки 3 точки 4 точки 3 точки
Б)	За вярно посочен интервал от време 1 час За описание на схемата на работа	3 точки 3 точки
17		Общо 20 точки
17	Съставяме системата $\begin{cases} a + b + c = 72 \\ \frac{c}{2} - h = 7 \\ h = \frac{ab}{c} \end{cases}$ Получаване на $ab = 2592 - 72c$ Получаване на $c^2 + 130c - 5184 = 0$ Намиране на $c = 32$ cm Съставяне на система за катетите a и b $\begin{cases} a + b = 40 \\ a \cdot b = 288 \end{cases}$	3 точки 3 точки 3 точки 3 точки

	Получаване на квадратното уравнение $a^2 - 40a + 288 = 0$	2 точки
	Намиране на дължините на катетите	3 точки
	$(a, b) = (20 \pm 4\sqrt{7}; 20 \mp 4\sqrt{7})$	

Примерно решение на задача 16.

Нека помпите са n . Тъй като те са с еднаква мощност производителността на всяка от тях е $\frac{1}{10n}$.

Означаваме с a_1 времето на работа на първата помпа, с a_2 времето на работа на втората помпа и т.н. с a_n времето на работа на n -тата помпа. Тъй като те се включват последователно на равни интервали от време $a_1, a_2, \dots, a_n$ образуват крайна аритметична прогресия и $a_n = 7$.

$$\text{От } \frac{1}{10n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 1$$

$$\text{следва } \frac{1}{10n}(S_n) = 1 \Rightarrow \frac{1}{10n}\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = 1 \Rightarrow \frac{1}{10}\left(\frac{a_1 + 7}{2}\right) = 1 \Rightarrow a_1 = 13 \text{ часа.}$$

Б) От $a_n = 7$ при $n = 7$ получаваме разликата на прогресията $d = -1$ т.е. помпите работят в следния режим: първата работи 13 часа, втората – 12 часа, третата - 11 часа, четвъртата - 10 часа, петата- 9 часа, шестата- 8 часа, седмата- 7 часа т.е. те се включват последователно една след друга на интервал от 1 час.

Примерно решение на задача 17: Съставяме системата

$$\begin{cases} a + b + c = 72 \\ \frac{c}{2} - h = 7 \\ h = \frac{ab}{c} \end{cases}$$

От първото уравнение получаваме $a + b = 72 - c$

След повдигане на втора степен и прилагане на Питагорова теорема получаваме

$$ab = 2592 - 72c$$

От системата получаваме квадратното уравнение $c^2 + 130c - 5184 = 0$, което има единствено положително решение $c = 32$ cm.

За намирането на катетите съставяме системата $\begin{cases} a + b = 40 \\ a \cdot b = 288 \end{cases}$,

от която получаваме квадратното уравнение $a^2 - 40a + 288 = 0$.

Дължините на катетите са $(a, b) = (20 \pm 4\sqrt{7}; 20 \mp 4\sqrt{7})$.